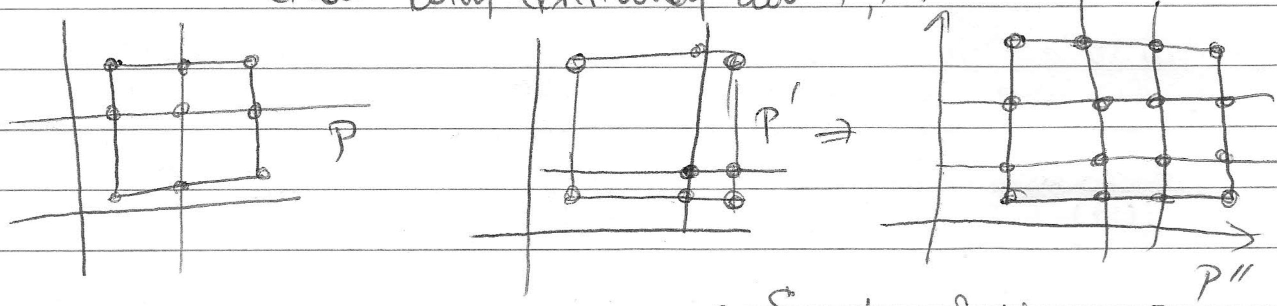
01/03/16.

$P_1\times\dots\times P_n$ $\quad P_1'\times\dots\times P_n'$

**Παράδειγμα**: Αν $P, P'$ δύο διαμερίσεις τότε $P''=(P_1\cup P_1')\times\dots\times(P_n\times P_n')$ είναι κοινή εκλέπτυνση των $P, P'$.

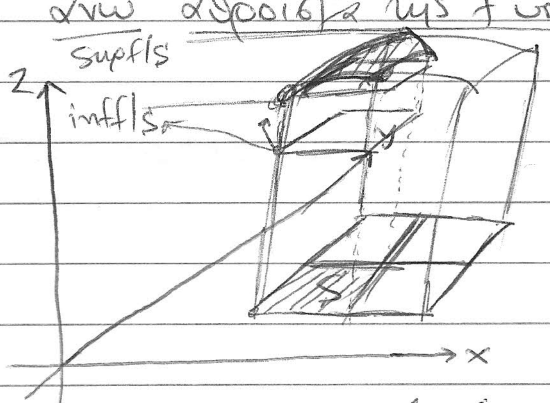



Για τα ~~[illegible]~~ υποορθογώνια $S\in S_P$ μιας διαμέρισης $P$ ισχύουν:

(α) $S\subset A$, (b) $\bigcup_{S\in S_P} S = A$, (c) $\sum_{S\in S_P} v(S)=v(A)$, (d) $\mathring{S}\cap\mathring{S}'=\emptyset$, για $S\neq S'$.

**Ορισμός**: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ένα κλειστό ορθογώνιο, $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $P$ διαμέριση του $A$. Τα $L(f,P)=\sum_{S\in S_P}(\inf f|_S)v(S)$, $U(f,P)=\sum_{S\in S_P}(\sup f|_S)v(S)$ ονομάζονται κάτω και άνω άθροισμα της $f$ υπό την $P$.

$\inf f|_S = \inf\{f(x): x\in S\}$




$v(S\times[0,\inf f|_S]) = \inf f|_S\cdot v(S)$

$f$: φραγμένη $\Rightarrow$ $-\infty < \underbrace{\inf f}_{=\inf\{f(x):x\in A\}} \overset{S\subset A}{\le} \underbrace{\inf f|_S}_{=\inf\{f(x):x\in S\}} \le \sup f|_S \le \sup f < \infty$

**Πρόταση**: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε ισχύουν: (α) $\forall P\in\mathcal{P}(A): -\infty<\inf f\cdot v(A)\le L(f,P)\le U(f,P)\le \sup f\cdot v(A)<\infty$

(b) $\forall P, P'\in\mathcal{P}(A)$, $P'\supset P$: $L(f,P)\le L(f,P')$ και $U(f,P')\le U(f,P)$

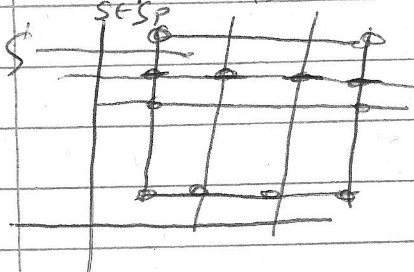
(c) $\forall P, P'\in\mathcal{P}(A)$: $L(f,P')\le U(f,P)$

__Απόδειξη:__ (α) $v(A)=\sum_{S\in\mathcal{S}_P} v(S) \Rightarrow \overbrace{\sum_{S\in\mathcal{S}_P} \inf f\cdot v(S)}^{\inf f\cdot v(A)} \le \overbrace{\inf f|_S\, v(S)}^{L(f,P)} \le$

$$\le \overbrace{\sum_{S\in\mathcal{S}_P} \sup f|_S\, v(S)}^{U(f,P)} \le \overbrace{\sum_{S\in\mathcal{S}_P} \sup f\, v(S)}^{\sup f\cdot v(A)}$$

(b) $(\forall S\in\mathcal{S}_P)(\exists \ell_S\in\mathbb{N})$ υποορθογώνια $T_i^{(S)}\in\mathcal{S}_{P'}$ ε.ω. $S=\bigcup_{i=1}^{\ell_S} T_i^{(S)}$, $v(S)=\sum_{i=1}^{\ell_S} v(T_i^{(S)})$ και $\inf f|_S \le$ $\le \inf f|_{T_i^{(S)}} \le \sup f|_{T_i^{(S)}} \le \sup f|_S \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overbrace{\sum_{S\in\mathcal{S}_P}\inf f|_S\cdot v(S)}^{L(f,P)} = \sum_{S\in\mathcal{S}_P}\sum_{i=1}^{\ell_S}\inf f|_S\, v(T_i^{(S)}) \le \underbrace{\sum_{S\in\mathcal{S}_P}\sum_{i=1}^{\ell_S}\inf f|_{T_i^{(S)}}\, v(T_i^{(S)})}_{L(f,P')}$$




← καινούρια διαμέριση

και αντίστοιχα $U(f,P')\le U(f,P)$

(c) Έστω $P''\in\mathcal{P}(A)$ μία κοινή εκλέπτυνση των $P,P' \Rightarrow P''\supseteq P, P''\supseteq P' \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(f,P') \underset{(b)}{\le} L(f,P'') \underset{(\alpha)}{\le} U(f,P'') \underset{(b)}{\le} U(f,P)$$

__Παρατήρηση:__ Σύμφωνα με το (α), τα σύνολα $\{\overbrace{L(f,P)}^{\in\mathbb{R}} : P\in P(A)\}$ και $\{\underbrace{U(f,P)}_{\in\mathbb{R}} : P\in P(A)\}$ είναι φραγμένα (στο $\mathbb{R}$)

__Ορισμός:__ $A\subseteq\mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο, $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τα

$L_f := \underset{<\infty}{\sup}\{L(f,P) : P\in P(A)\}$

$U_f := \underset{<\infty}{\inf}\{U(f,P) : P\in P(A)\}$

ονομάζονται κάτω και άνω ολ/τα της f.

__Πρόταση:__ $L_f\le U_f$.

__Απόδειξη:__ Έστω $P\in P(A)$. Τότε $L(f,P')\le U(f,P)$ $\forall P'\in P(A)$

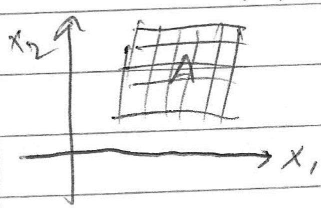
$\Rightarrow L_f\le U(f,P) \Rightarrow L_f\le U_f$.

**Ορισμός**: $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε η $f$ λέγεται ολοκληρώσιμη (στο $A$) αν $L_f = U_f$ και ονομάζουμε ολοκλήρωμα της $f$, το:

$$\int_A f = L_f = U_f.$$

Π.χ.: $A \subset \mathbb{R}^n$ κλ. ορθ., $f: A \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = c$, $c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall P \in P(A),\ \forall S \in S_P : \inf f|_S = c = \inf f|_S \Rightarrow$




$\Rightarrow \forall P \in P(A),\ L(f,P) = \sum_{S \in S_P} \inf f|_S \cdot v(S) =$

$= c \cdot \sum_{S \in S} v(S) = c \cdot v(A)$ και

$U(f,P) = c \cdot v(A) \Rightarrow$

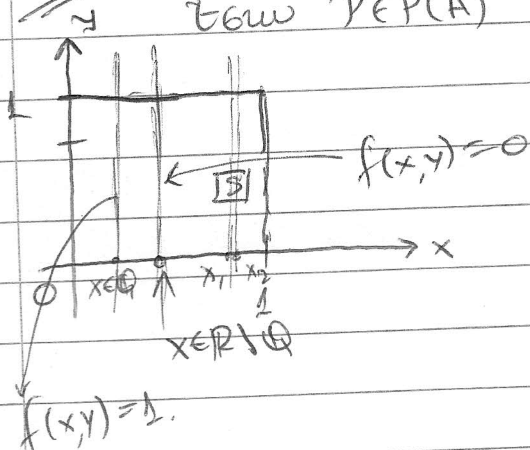
$\Rightarrow L_f = c \cdot v(A),\quad U_f = c \cdot v(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A f = c\, v(A) = \int_A c \Rightarrow \int_A 1 \left(= \int_A 1 \cdot d\bar{x}\right) = v(A) \geq 0$

Επίσης $\int_A 0 = 0$

Π.χ.: $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Έστω $P \in P(A)$




Αφού $\forall S = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta] \in S_P$

$\exists x_1 \in [\alpha,\beta] \cap \mathbb{Q}$ και $x_2 \in [\alpha,\beta] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf f|_S = 0,\ \sup f|_S = 1\ \forall S \in S_P \Rightarrow$

$\Rightarrow L(f,P) = 0,\ U(f,P) = \sum_{S \in S_P} 1 \cdot v(S) = v(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow L_f = 0,\ U_f = v(A) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists \int_A f$